Strong Noether's Theorem: Applications in Astrodynamics

Syed Arif Kamal 🔟

PhD; MA (Astrophysics), Johns Hopkins, United States; MS, Indiana, Bloomington, United States Professor and Chairman, Department of Mathematics, University of Karachi, Karachi 75270, Pakistan; profdrakamal@gmail.com

Noether's theorem is one of the fundamental theorems relating conservation laws to spacetime symmetries (Fig. 1). A stronger version of Noether's theorem was given and its applications

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt-von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918¹).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und teine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen²). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918. In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt

es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode. Egt. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math-phys. Klasso., 1918. Heft 2. 17

Fig. 1. First page of Emmy Noether's article "Invariante Variationsprobleme"(1918)

demonstrated in handling two-body problem of planetary motion. It essentially states that if one sets up a problem closer to natural symmetries of the system, one should discover additional constants of motion. Two-body problem was set-up in the elliptic-astrodynamical-coördinate mesh, and Kepler's equation was shown to be a particular solution of the equation of motion. This formulation yielded 3 constants of motion, instead of the customary 2.

Keywords: Conservation laws • Constants of motion • Elliptic-astrodynamical-coördinate mesh • Spacetime symmetries • Two-body problem

Web address of this document: https://www.ngds-ku.org/Presentations/Noether.pdf